

刘蒋巍：2025 江苏复赛不等式推广证明及其变式

作者借鉴参考文献[1~6]中的研究方法，对 2025 全国高中数学联赛江苏复赛第 9 题不等式进行系统研究。

【试题呈现】

(2025 全国高中数学联赛江苏复赛第 9 题，16 分)

设 a, b 为正实数，证明：

$$a^6 b^6 \cdot (a^4 + b^4) \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^{16}$$

【推广命题：一般性命题】

为了让研究更有价值，我们对 2025 全国高中数学联赛江苏复赛第 9 题作如下一般性推广：

(推广命题)

设 a, b 为正实数， m, n 为非负实数，且 $k = 2m + n$ ，则 $a^m b^m \cdot (a^n + b^n) \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$

证明：比值法，利用单调性简化证明

令 $a = bt (t > 0)$ ，则欲证不等式 $a^m b^m \cdot (a^n + b^n) \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$ 转化为：

$$t^m \cdot (t^n + 1) \leq 2 \cdot \left(\frac{t+1}{2}\right)^k, \text{ 即: } 2^{k-1} \leq \frac{(t+1)^k}{t^m \cdot (t^n + 1)}, \text{ 其中 } k = 2m + n$$

令 $f(t) = \frac{(t+1)^k}{t^m \cdot (t^n + 1)}$ ，求导分析单调性：当 $t \in (0, 1)$ 时， $f'(t) < 0$ ， $f(t) = \frac{(t+1)^k}{t^m \cdot (t^n + 1)}$

单调递减；当 $t \in (1, +\infty)$ 时， $f'(t) > 0$ ， $f(t) = \frac{(t+1)^k}{t^m \cdot (t^n + 1)}$ 单调递增；则 $f(t) \geq f(1)$ ；

注意到 $f(1) = 2^{k-1}$ ，则命题得证！

说明：2025 全国高中数学联赛江苏复赛第 9 题仅为该推广命题 “ $m = 6, n = 4$ ” 情况下的特例.

【相关命题及其证明】

设 a, b 为正实数, m, n 为非负实数, 且 $k = 2m + n$, $k \in (0, 1]$

$$\text{则 } a^m b^m \cdot (a^n + b^n) \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$$

证明:

引理(加权不等式): 对正实数 x, y 和权重 $p, q > 0$, 且 $p + q = 1$, 有 $x^p y^q \leq px + qy$

引理证明: 对凸函数 $f(t) = \ln t$, 由 Jensen 不等式的加权形式:

对正实数 x, y , $p + q = 1$, $p, q > 0$, 有:

$$\ln(px + qy) \geq p \ln x + q \ln y$$

对上式两边取以 e 为底的指数, 得:

$$px + qy \geq e^{p \ln x + q \ln y} = x^p y^q, \text{ 当且仅当 } x = y \text{ 时取等号.}$$

证毕!

记 $X = a^{m+n} b^m$, $Y = a^m b^{m+n}$, 则 $a^m b^m \cdot (a^n + b^n) = X + Y$

对于 $X = a^{m+n} b^m$: 指数和 $m + n + m = k$, 取权重 $p = \frac{m+n}{k}$, $q = \frac{m}{k}$, 则 $p + q = 1$,

由 “ $x^p y^q \leq px + qy$ ” 得: $X = a^{m+n} b^m = (a^k)^p \cdot (b^k)^q \leq pa^k + qb^k = \frac{m+n}{k} a^k + \frac{m}{k} b^k$,

同理, 对于 $Y = a^m b^{m+n}$, 取权重 $p = \frac{m}{k}$, $q = \frac{m+n}{k}$, 得: $Y \leq \frac{m}{k} a^k + \frac{m+n}{k} b^k$.

两式相加, 得: $a^m b^m \cdot (a^n + b^n) = X + Y \leq a^k + b^k$

当 $k \in (0, 1]$ 时, 构造函数 $g(t) = t^k$, 由 Jensen 不等式: $\frac{a^k + b^k}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$

$$\text{则 } a^m b^m \cdot (a^n + b^n) = X + Y \leq a^k + b^k \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$$

【变式题组】

以该推广命题为起点, 设计从基础难度到高中竞赛难度的变式题, 引导学生在循序渐进的探究中, 提高数学能力。

【从初中到新高一】

(变式 1, 初中难度) 设 a, b 为正实数, 求证: $ab \cdot (a+b) \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$;

参考解答:

欲证不等式等价于: $a^2b + ab^2 \leq \frac{(a+b)^3}{4}$, 即证: $4(a^2b + ab^2) \leq (a+b)^3$, 即证:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 4(a^2b + ab^2) = a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0$, 注意到:

$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

当且仅当 $a=b$ 时取等号, 证毕!

【刘蒋巍说】我们通过具体指数, 让学生直观感受“乘积和”与“均值幂”的关系, 为后续抽象推广学习作铺垫.

(变式 2, 新高一难度) 设 a, b 为正实数, 求证: $abc \cdot (a+b+c) \leq 3 \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$

参考解答:

由均值不等式, 得: $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$, 当且仅当 $a=b=c$ 时取等号

则 $abc \cdot (a+b+c) \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c) = 3 \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$, 当且仅当 $a=b=c$ 时取等号, 证毕!

【刘蒋巍说】我们从二元到三元, 引导学生发现“变量个数增加时, 系数与均值分母同步变化”的基本规律.

【高中数学竞赛】

(变式 3, 竞赛难度) 设 a, b 为正实数, 证明: $a^{\frac{1}{32}}b^{\frac{1}{32}} \cdot (a^{\frac{1}{16}} + b^{\frac{1}{16}}) \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$

参考解答:

当 $k \in (0, 1]$ 时, 构造函数 $f(t) = t^k$, 由 Jensen 不等式: $\frac{a^k + b^k}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$

当 $k = \frac{1}{16}$ 时, $\frac{a^{\frac{1}{16}} + b^{\frac{1}{16}}}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{16}}$, 即: $a^{\frac{1}{16}} + b^{\frac{1}{16}} \leq 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{16}}$, 当且仅当 $a=b$ 时

刘蒋巍：2025 江苏复赛不等式推广证明及其变式

取等号

因为 $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$, 所以 $(ab)^{\frac{1}{32}} \leq (\frac{a+b}{2})^{2 \times \frac{1}{32}} = (\frac{a+b}{2})^{\frac{1}{16}}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号;

将上面两个不等式两边分别相乘, 得:

$$a^{\frac{1}{32}} b^{\frac{1}{32}} \cdot (a^{\frac{1}{16}} + b^{\frac{1}{16}}) \leq 2 \cdot (\frac{a+b}{2})^{\frac{1}{16}} \cdot (\frac{a+b}{2})^{\frac{1}{16}} = 2 \cdot (\frac{a+b}{2})^{\frac{1}{8}}$$

当且仅当 $a=b$ 时取等号.

【刘蒋巍说】命题“设 a, b 为正实数, m, n 为非负实数, 且 $k=2m+n$, $k \in (0,1]$ 则 $a^m b^n \cdot (a^n + b^n) \leq 2 \cdot (\frac{a+b}{2})^k$ ”中, 令 $m=\frac{1}{32}$, $n=\frac{1}{16}$, 则 $k=2m+n=\frac{1}{8}$, 即为变式 3.

训练若此, 其技必强!

参考文献:

- [1]黄星,刘蒋巍. 一道国际大学生数学竞赛题的命题研究 [J]. 高等数学研究, 2023, 26 (06): 22-23+28.
- [2]黄星,刘蒋巍. 关于正定矩阵不等式证明的一类新方法 [J]. 高等数学研究, 2023, 26 (03): 51-52.
- [3]刘蒋巍. 一道考研数学题的源与流 [J]. 高等数学研究, 2020, 23 (06): 13-14+41.
- [4]刘蒋巍. 一道考研数学题的命题研究 [J]. 高等数学研究, 2018, 21 (05): 41-42.
- [5]刘蒋巍. 一道高中数学联赛模拟题的命制与解析 [J]. 中学数学教学参考, 2018, (07): 60-61.
- [6]刘蒋巍. 一道积分不等式的命题研究——演绎深化,逆推生成 [J]. 高等数学研究, 2017, 20 (06): 58-60.