

5. 算字诀

1. 生四：四则运算：+、-、×、÷

函数运算：抽象函数、函数方程

矩阵运算：如旋转矩阵

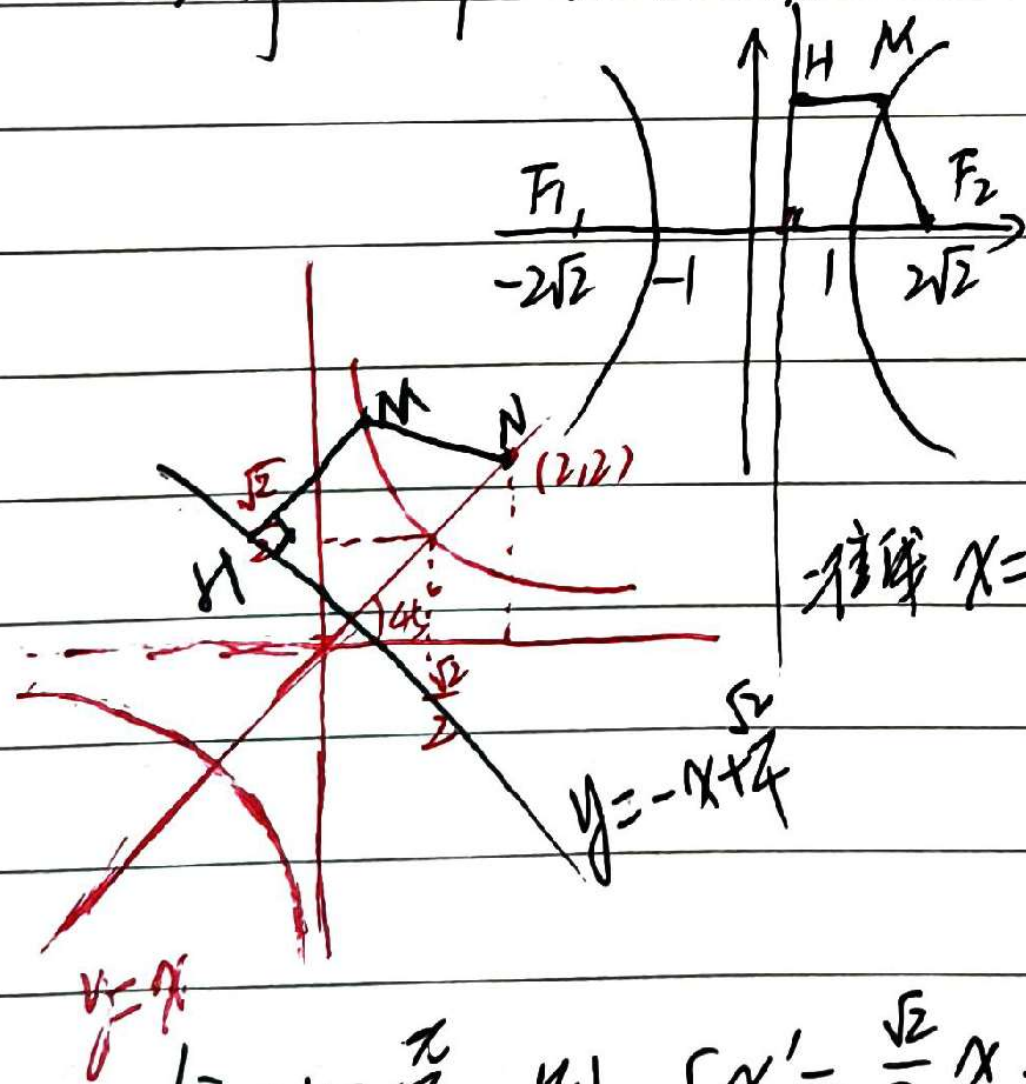
双曲线运算：

(2025全国I卷第22题) 已知双曲线C的虚轴长是实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则C的离心率为

解法1: $b = \sqrt{7}a$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}a$, $e = \frac{c}{a} = 2\sqrt{2}$

解法2. 特值法 $a=1$, $b=\sqrt{7}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$, $e = \frac{c}{a} = 2\sqrt{2}$

在解法2中，符合题意的双曲线为： $x^2 - \frac{y^2}{7} = 1$ (*) 焦点 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$



$e = \frac{MF_2}{MH} = 2\sqrt{2}$

矩阵运算 (旋转矩阵) 逆时针旋转角.

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

$\frac{1}{2}\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - x') \end{cases}$$

代入(*)式得:

$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{(y' - x')^2}{14} = 1$; 即: $3x'^2 + 8x'y' + 3y'^2 = 7$

焦点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 得: $(2, 2)$, 准线 $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 得: $y = -x + \frac{\sqrt{2}}{4}$

于是有以下变式问题:

已知曲线 $C: 3x^2 + 8xy + 3y^2 = 7$ 上一点 M , 定点 $N(2, 2)$, 直线 $l: y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
过点 M 作 MH 垂直于直线 l , 垂足为 H . 则 $\frac{MN}{MH} = \underline{\quad 2\sqrt{2} \quad}$.

若将 $x^2 - y^2 = 1$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 角度, 得到 $xy = \frac{1}{2}$, 即反比例函数 $y = \frac{1}{2x}$.

函数运算

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{和差化积})$$

二倍角

↙

$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

↓

$2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} = 2 \cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) + 2$$

$$\text{即: } \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) + 1$$

$$\text{令 } f(x) = \cos wx$$

$$\text{则 } f^2(x) + f^2(y) = f(x+y) \cdot f(x-y) + 1$$

$$\text{若 } w = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } f(1) = 0.$$

于是有: 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f^2(x) + f^2(y) = f(x+y)f(x-y) + 1$, $f(1) = 0$, 则 A, B, C.

A. $f(3) = 0$ B. $f(x)$ 为偶函数 C. $f(x)$ 最大值为 1

同则运算: 由等差, 等比数列, 可想到等和, 等积数列

$$\text{由 } PF_1 + PF_2 = 2a, PF_1 - PF_2 = 2a, \text{ 可想到 } PF_1 \cdot PF_2 = 2a, \frac{PF_1}{PF_2} = 2a$$

②