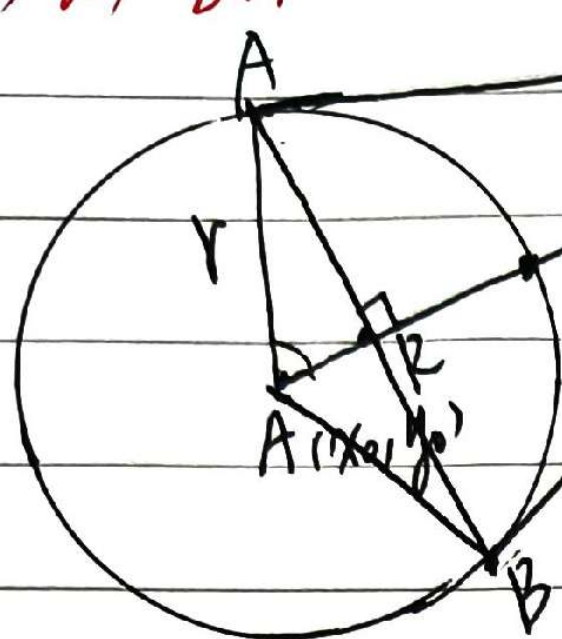


参组操.形.算.动.逆

——2025年高考题变式探索

与动点诀



1. 轨迹问题. 即动点问题.

$$\frac{AR}{r} = \frac{r}{AP} \Rightarrow |AP| \cdot |AR| = r^2$$

给定点 $A(x_0, y_0)$ 和半径 $r > 0$, 设 Γ 是以 A 为圆心, r 为半径的圆, 对平面中任一点 $P \neq A$, 定义射线 $\overrightarrow{AP}$ 上满足 $|AP| \cdot |AR| = r^2$ 的点 R 为 P 关于 Γ 的反演点.

设 $P(x, y)$, 故 $\overrightarrow{AP} = (x - x_0, y - y_0)$, $|AP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

由 $|AP| \cdot |AR| = r^2$, 得 $|AR| = \frac{r^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{|AR|}{|AP|} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{r^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (x - x_0, y - y_0)$$

$$\parallel \begin{aligned} (x_R - x_0, y_R - y_0) &= \left(\frac{r^2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \frac{r^2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R \left(x_0 + \frac{r^2(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, y_0 + \frac{r^2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right)$$

设 O 为坐标原点, 则 $k_{OP} = \frac{y}{x}$.

$$\frac{k_{OR}}{k_{OP}} = \frac{y_0 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + r^2(y - y_0)}{x_0 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + r^2(x - x_0)} \cdot \frac{x}{y} \stackrel{\text{记作}}{=} k \quad (k \text{ 为常数})$$

$$y_0 x [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + r^2 x (y - y_0) = k y x_0 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + r^2 k (x - x_0) y$$

由于圆方程二次项系数相等, 则若 x_0, y_0 中有一者为 0, 则 P 点轨迹为圆.

若 $x_0=0$, 则 (*) 式可化为:

即 $A(x_0, y_0)$ 在 y 轴上.

$$y_0 x \cdot [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] + r^2 x \cdot (y-y_0) = r^2 k x y$$

若 $x \neq 0$, 即 $P(x, y)$ 不在 y 轴上.

$$\text{则 } y_0 \cdot [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] + r^2 (y-y_0) = r^2 k \cdot y \quad (x \neq 0)$$

表示一个圆.

↓
P 点的轨迹方程

可通过三角换元, 写出 P 点的参数方程 (圆的参数方程)

再引入 Q 点在单位圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上. (可用三角换元表示 Q 点)

这样 $|PQ|$ 的距离, 就是一个三角函数最值问题. 在高中范围内可解.

于是有了 2025 年全国 I 卷第 18 题第 2 问

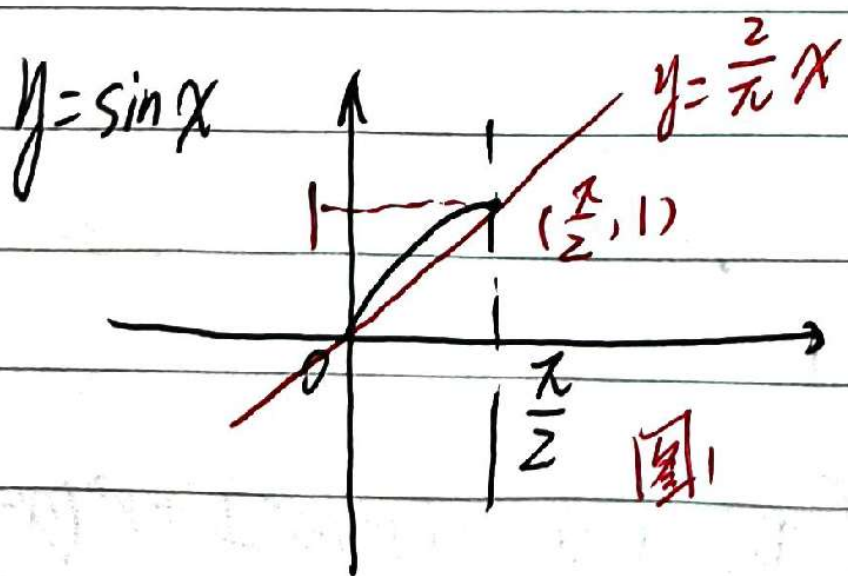
(2025 全国 I 卷第 18 题)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 下顶点为 A, 动点 P 不在 y 轴上, 点 R 在射线 AP 上, 且满足 $|AP| \cdot |AR| = 3$

(i) 设 $P(m, n)$, 求 R 的坐标 (用 m, n 表示) $R(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2} - 1)$

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 斜率的五倍, 求 $|PQ|$ 的最大值 $3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$

2. 引入参数, 设计动直线问题



当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$

引入参数 a , 设计了动直线 $y = -ax$.

则满足图 1 的 $-a \leq \frac{2}{\pi}$, 即: $a \geq -\frac{2}{\pi}$.

$\sin x \geq -ax$, 对 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立, 求 a 范围

②

为了让问题更加隐蔽, 作如下设计:

构造函数 $f(x) = x \cdot \sin x + ax^2 - 1$

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) \geq -1$ 恒成立, 求 a 范围.

$$[-\frac{2}{\pi}, +\infty)$$

还可以通过引入参数的方法, 设计其他动点问题.