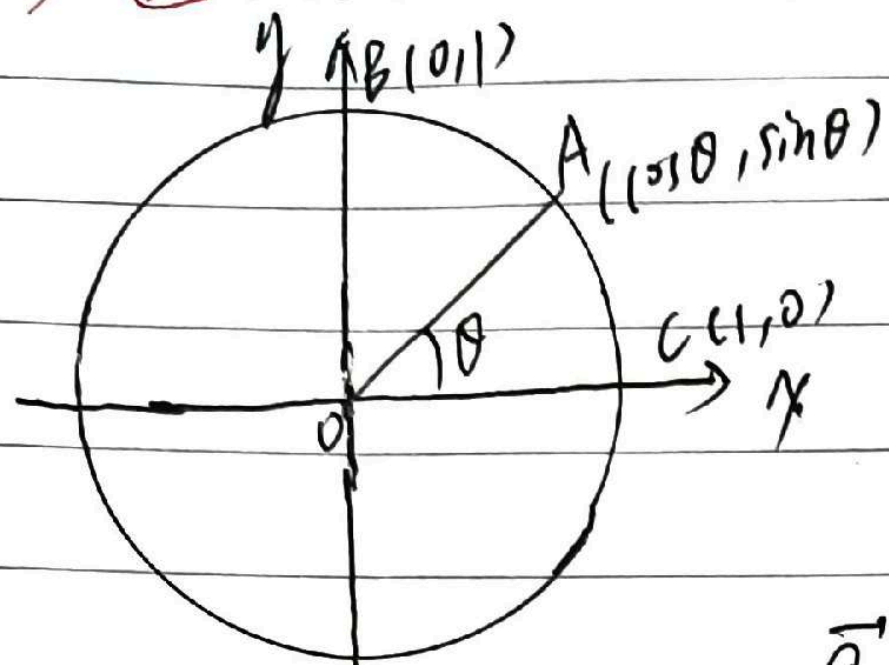


与逆序求 —— 逆向推演



$$\vec{a} = \vec{OA} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\vec{b} = \vec{OB} = (0, 1)$$

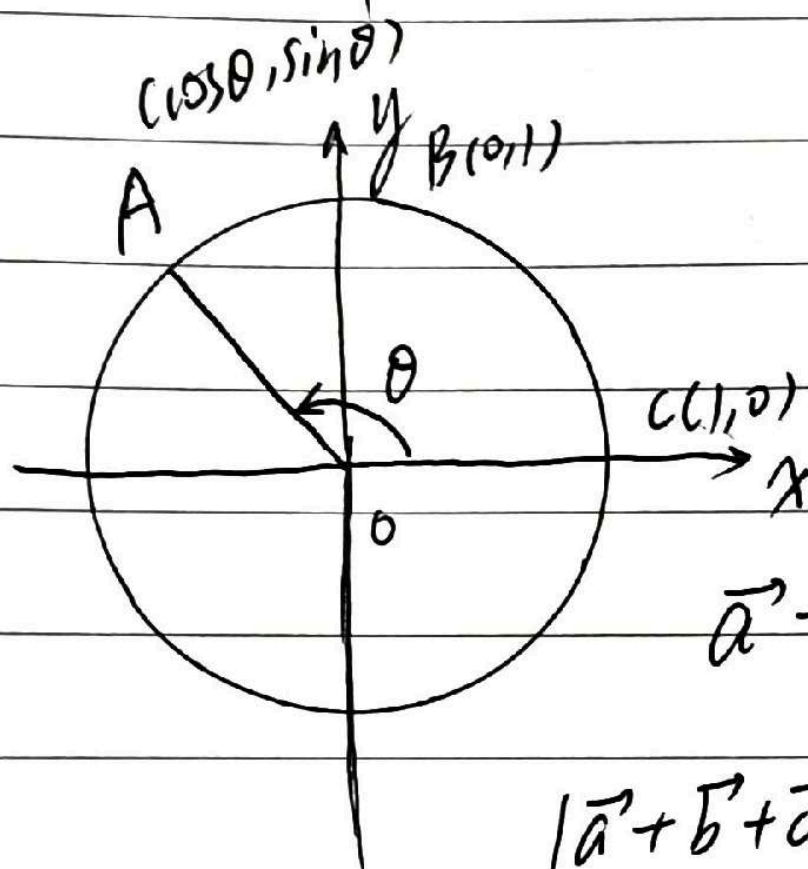
$$\vec{c} = \vec{OC} = (1, 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (0, 1) = \sin \theta$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (1, 0) = \cos \theta$$

若 θ 为第二象限角，即： $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \pi + 2k\pi$



此时 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\cos \theta + 1, \sin \theta + 1)$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = (\cos \theta + 1)^2 + (\sin \theta + 1)^2$$

$$= \cos^2 \theta + 2\cos \theta + 1 + \sin^2 \theta + 2\sin \theta + 1$$

$$= 2(\sin \theta + \cos \theta) + 2$$

$$= 2\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 2 \in (1, 5)$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$$

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{则 } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \in (1, \sqrt{5})$$

$$\text{用函数 } f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

进行包装，逆向推演生成如下

问题1: (2025年上海卷第12题).

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是平面内三个不同的单位向量，若 $f(\vec{a} \cdot \vec{b}) + f(\vec{b} \cdot \vec{c}) + f(\vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$

则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 的取值范围是 $(1, \sqrt{5})$

再举一例：先构造拐点处切线

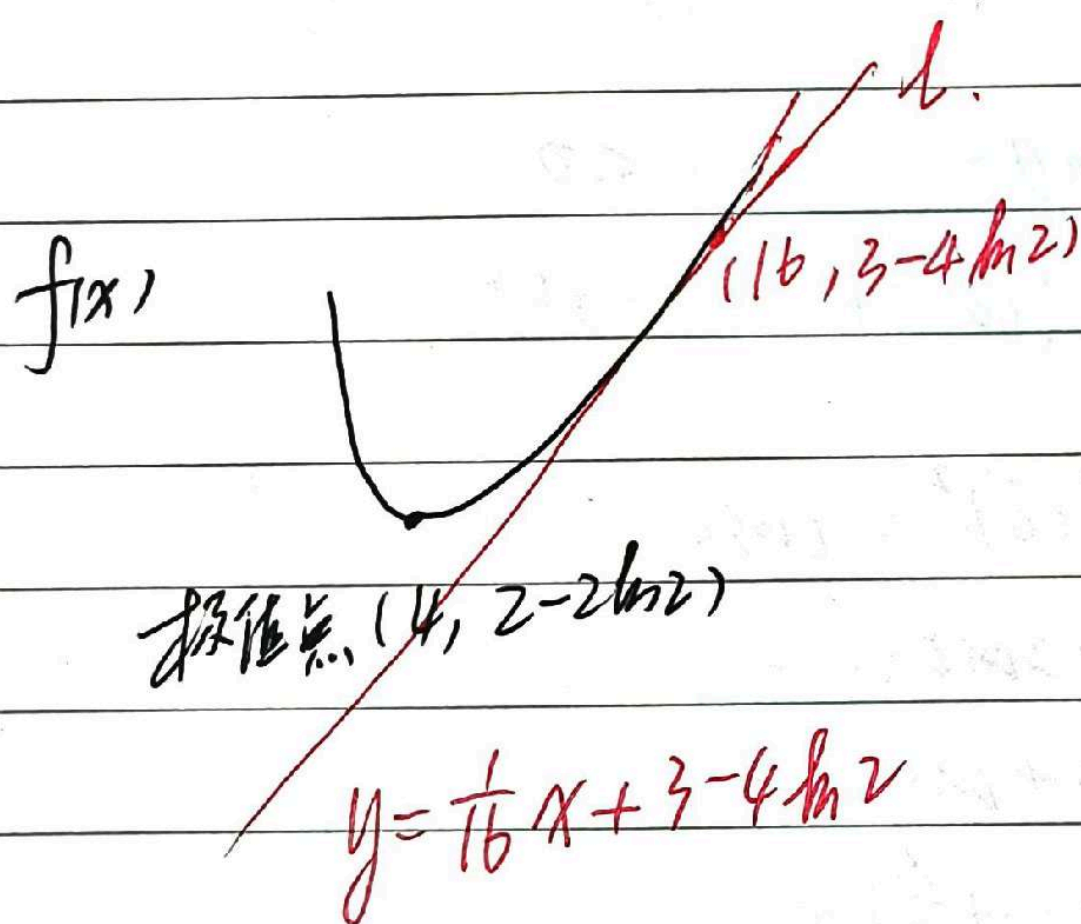
$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-\sqrt{x} + 4}{4x^2}$$

$$\text{令 } f''(x) = 0, \text{ 得: } x = 16.$$

$$f'(16) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}, \quad f(16) = 4 - 4\ln 2$$

$$\text{则 } f(x) \text{ 拐点处切线为: } y = \frac{1}{16}(x-16) + 4 - 4\ln 2 \\ = \frac{1}{16}x + 3 - 4\ln 2$$



于是有了以下问题：

问题2：

已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ 且 $k > \frac{1}{16}$, $a \leq 3 - 4\ln 2$

求证：直线 $y = kx + a$ 与 $f(x)$ 有唯一公共点。

②

“算字诀”中问题:

已知曲线 $C: 3x^2 + 8xy + 3y^2 = 7$ ($x > 0, y > 0$) 上一点 M ,

定点 $N(2, 2)$, 直线 $l: y = -x + \frac{\sqrt{2}}{4}$, 过点 M 作 MH

垂直于直线 l , 垂足为 H , 则 $\frac{MN}{MH} = \underline{\quad\quad} 2\sqrt{2}$

该题也是由双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{7} = 1$ 以及其焦点 $(2\sqrt{2}, 0)$, 准线 $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

逆向推导 (逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后, 逆向推导) 得到