

刘蒋巍：数列关联性质的推广 ——2026 届苏州高三期中数列压轴题的源与流

【关联数列的定义与性质】

我们定义由两个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 生成的“关联数列” $\{c_n\}$ ：

$$c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n,$$

其中 A_n 和 B_n 分别为数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和， $A_0 = 0$ ， $B_0 = 0$ 。

这一定义背后有一个关键性质： $c_n = A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1}$ ，也就是说： c_n 实际上是乘积 $A_n B_n$ 的差分。

这一性质不难证明： $A_n = \sum_{k=1}^n a_k = A_{n-1} + a_n$ ； $B_n = \sum_{k=1}^n b_k = B_{n-1} + b_n$ ；

$$\begin{aligned} A_n B_n - A_{n-1} B_{n-1} &= (A_{n-1} + a_n)(B_{n-1} + b_n) - A_{n-1} B_{n-1} = A_{n-1} b_n + a_n B_{n-1} + a_n b_n \\ &= (A_n - a_n) b_n + a_n (B_{n-1} + b_n) = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n = c_n \end{aligned}$$

该关键性质得证！

考虑“关联数列” $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $C_n = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n (A_k B_k - A_{k-1} B_{k-1})$

由于 $A_0 = 0$ ， $B_0 = 0$ ，有 $A_0 B_0 = 0$ ，因此： $C_n = A_n B_n$

$$\text{即：} \sum_{k=1}^n c_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

【推广命题】

由两个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 生成的“关联数列” $\{c_n\}$ ： $c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$ ，其中 A_n 和 B_n 分别为数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和， $A_0 = 0$ ， $B_0 = 0$ 。

若 $\{c_n\}$ 为正项数列，且级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k}$ 收敛，记其和为 S ；则对任意正整数 n ，有

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k > \frac{n^2}{S}, \text{ 即：} A_n B_n > \frac{n^2}{S}$$

推广命题的证明：

标准柯西-施瓦茨不等式：对于正实数序列 $g_1, g_2, \dots, g_n$ 和 $h_1, h_2, \dots, h_n$ ，有：

$$(\sum_{k=1}^n g_k^2)(\sum_{k=1}^n h_k^2) \geq (\sum_{k=1}^n g_k h_k)^2$$

等号当且仅当 $\frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2} = \dots = \frac{g_n}{h_n}$ 时成立

令 $g_k = \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}$ ， $h_k = \sqrt{y_k}$ ，则有：

$$(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{y_k})(\sum_{k=1}^n y_k) \geq (\sum_{k=1}^n x_k)^2, \text{ 即: } \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{(\sum_{k=1}^n x_k)^2}{\sum_{k=1}^n y_k}$$

则：对于正数 x_k 、 y_k ，有

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$$

等号当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ 时成立

取 $x_k = 1$ ， $y_k = c_k$ ，有： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n c_k} = \frac{n^2}{C_n}$ ，即： $C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}}$

由于 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k} = S$ ，有： $C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}} \geq \frac{n^2}{S}$

等号当且仅当 $\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2} = \dots = \frac{1}{c_n}$ ，即： $c_1 = c_2 = \dots = c_n$ 时成立

由于级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k}$ 收敛，则 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 不能全相等，（否则级数发散）

故对任意正整数 n ，有

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k > \frac{n^2}{S}, \text{ 即: } A_n B_n > \frac{n^2}{S}$$

命题得证！

【“推广命题”的应用】

应用 1：苏州期中卷数列压轴题

在 2026 届苏州高三期中卷（高三年级期中阳光调研试卷）中第 19 题第 3 问：（原卷如下）：

19. (17 分)

已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 前 n 项和分别为 A_n , B_n , C_n , 且有 $c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$.

(1) 若 $a_n = 2n-1$, $b_n = 3^n$, 求 c_2 ;

(2) 若 $A_{2025} = 2026$, $B_{2025} = \frac{1}{2026}$, 求 C_{2025} ;

(3) 已知当 $x_n > 0, y_n > 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$, 当且

仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ 时“=”成立. 若数列 $\{c_n\}$ 为正项数列, 且当 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时有

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 1$, 若 $c_1 = c_2 = 2$, 试比较 $A_n B_n$ 与 n^2 的大小, 并说明理由.

原卷中“ $c_1 = c_2 = 2$ ”, 则由递推关系“ $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 1$ ”得 $c_3 = 0$, 这与数列 $\{c_n\}$

为正项数列矛盾.

(3) 已知当 $x_n > 0, y_n > 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$, 当且

仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ 时“=”成立. 若数列 $\{c_n\}$ 为正项数列, 且当 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时有

$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 1$, 若 $\overset{2c_1=c_2=6}{c_1=c_2=2}$, 试比较 $A_n B_n$ 与 n^2 的大小, 并说明理由.

在“江苏省新高考数学交流群”中, 又发现了一个修改版本, 将“ $c_1 = c_2 = 2$ ”

修改成了“ $2c_1 = c_2 = 6$ ”, 这应该是考试时统一修改的, 否则题目就出错了.

下面, 我们按照修改版本去分析:

由于 $c_n > 0$ ，则 $\frac{c_{n+1}}{c_n^2} = \frac{c_n}{c_{n-1}^2} - \frac{1}{c_n}$ ，即： $\frac{1}{c_n} = \frac{c_n}{c_{n-1}^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2}$

则： $\sum_{k=2}^n \frac{1}{c_k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{c_k}{c_{k-1}^2} - \frac{c_{k+1}}{c_k^2} \right) = \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2} < \frac{2}{3}$ ，故 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} = \frac{1}{c_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{c_k} < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

由“推广命题”可知： $C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}}$ ，则 $C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}} > n^2$

则： $A_n B_n > n^2$

应用 2：辽宁鞍山期末压轴题

“江苏省新高考数学交流群”群友 江苏苏州周延韵 又发来了以下图片：

已知数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n ， B_n ，定义
数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的“关联数列”为 $\{c_n\}$ ，且
 $c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$ 。

(1) 若 $a_n = n$ ， $b_n = 2^n$ ，求 c_2 ；

(2) 若 $A_{2024} = 2024$ ， $B_{2024} = \frac{1}{2024}$ ，求
 $c_1 + c_1 + c_3 + \cdots + c_{2024}$ 的值；

(3) 已知当 $a_n > 0$ ， $b_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 时，

$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$ ，当且仅当

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时“=”成立。若数列 $\{c_n\}$ 为正项数

列，且 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} - 2$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$)， $c_1 = \frac{5}{2}$ ，

$c_2 = \frac{85}{8}$ ，证明： $A_n B_n > \frac{4}{5} n^2$ 。

24-25高三上·辽宁鞍山·期末



这是一道 2024~2025 辽宁鞍山高三上学期期末考试题，周老师发现了这两题本质相同，同时江苏苏州周延韵对本题还有其他深刻的见解，不过这些见解都被“撤回”了。

$$\frac{1}{c_1} = \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{c_2} = \frac{8}{85}, \quad \frac{c_2}{c_1^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{c_n} = \frac{c_n}{c_{n-1}^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2},$$

$$\text{则: } \sum_{k=2}^n \frac{1}{c_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{c_k}{c_{k-1}^2} - \frac{c_{k+1}}{c_k^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{c_1^2} - \frac{c_{n+1}}{c_n^2} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{c_2}{c_1^2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{故 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} = \frac{1}{c_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{c_k} < \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20} < \frac{5}{4}$$

$$\text{由“推广命题”可知: } C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}}, \text{ 则 } C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}} > \frac{20}{13} n^2 > \frac{4}{5} n^2$$

到这里，我似乎理解了，在“撤回”的话语中，是否有老师提出：**精度不够？**

【好好做做题】

“江苏省新高考数学交流群”群主蒋寅老师发言：“好好做做题”！

“好好做做题”对于教师而言，是指什么呢？

好好做问题，什么“好”呢？

第一层次：做命题推广，自己推广，自己证明

(推广命题 2) 由两个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 生成的“关联数列” $\{c_n\}$ ：

$c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$ ，其中 A_n 和 B_n 分别为数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和， $A_0 = 0$ ，

$B_0 = 0$ 。

若 $\{c_n\}$ 为正项数列，且 $c_1 = 1$ ， $\frac{c_{n+1}}{c_n} = q > 1$ ；则对任意正整数 n ，有

$$A_n B_n > \frac{q-1}{q} n^2$$

注：此时，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k}$ 为等比级数，收敛；

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{q}\right)^{k-1} = \frac{q}{q-1} = S, \quad A_n B_n = C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}} \geq \frac{n^2}{S} = \frac{q-1}{q} n^2$$

第二层次：向群友学习，“柯西-施瓦茨不等式”并不总有效！

群友提到“精度”的问题，这个问题很有深度，就是题目中给的“柯西-施瓦茨不等式”并不总有效！

（案例：“柯西-施瓦茨不等式”不是紧的！）

由两个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 生成的“关联数列” $\{c_n\}$ ： $c_n = a_n B_n + b_n A_n - a_n b_n$ ，其中 A_n 和 B_n 分别为数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和， $A_0 = 0$ ， $B_0 = 0$ 。

若正项数列 $\{c_n\}$ 满足 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{1}{n}$ ，且 $c_1 = 1$ ，试估计 $A_n B_n$ 的下界。

解法 1（用关联数列性质直接求解）：

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}, \quad c_n = c_1 \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{c_3}{c_2} \cdots \frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1} = n$$

由关联数列性质， $A_n B_n = C_n = \sum_{k=1}^n c_k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n^2}{2}$ ，故 $A_n B_n > \frac{n^2}{2}$

解法 2（应用“柯西-施瓦茨不等式”分析）：对于正数 x_k 、 y_k ，有

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}$$

等号当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ 时成立

取 $x_k = 1$ ， $y_k = c_k$ ，有： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n c_k} = \frac{n^2}{C_n}$ ，即： $C_n \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}}$

其中 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$ （调和数），由于 $H_n \sim \ln n + \gamma$ （其中 γ 为欧拉常数），当 n

很大时， $H_n > \ln n$ ，所以 $C_n \geq \frac{n^2}{H_n} \sim \frac{n^2}{\ln n}$ ，这与直接计算的下界 $\frac{n^2}{2}$ 相比更弱，也

就是说：“柯西-施瓦茨不等式”在此情况下，不是紧的！此时，直接计算，更有效！

注：这里涉及的不等式“ $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln n$ ”也可用高中方法证明：

在 2018 年出版的《江苏高考数学复习指南》中，我给出了如下文字：

$$\text{“（指数均值不等式）： } e^{\frac{m+n}{2}} < \frac{e^m - e^n}{m-n} < \frac{e^m + e^n}{2} \quad (m > n)$$

$$\text{其对数形式： } \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{b+a}{2} \quad (b > a > 0),$$

$$\text{又等价于： } \frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2}{a+b} \quad (b > a > 0)$$

$$\text{引申：当 } k \in N^* \text{ 时， } \frac{1}{k+1} < \frac{2}{k+(k+1)} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} < \frac{1}{k},$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

$$\text{即： } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \text{ 不难发现调和级数是发散的。”}$$

$$\text{其中就蕴含了 “ } \ln n < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ ”,}$$

$$\text{当然也蕴含了 “ } \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \text{ ” (后来，成了“2022 年全国 2 卷压轴题”)}$$

ENKI大成编者
江苏高考数学复习指南

(2) 若对任意 $x \in (0,1)$ ，恒有 $f(x) > 1$ ，求 a 的取值范围。

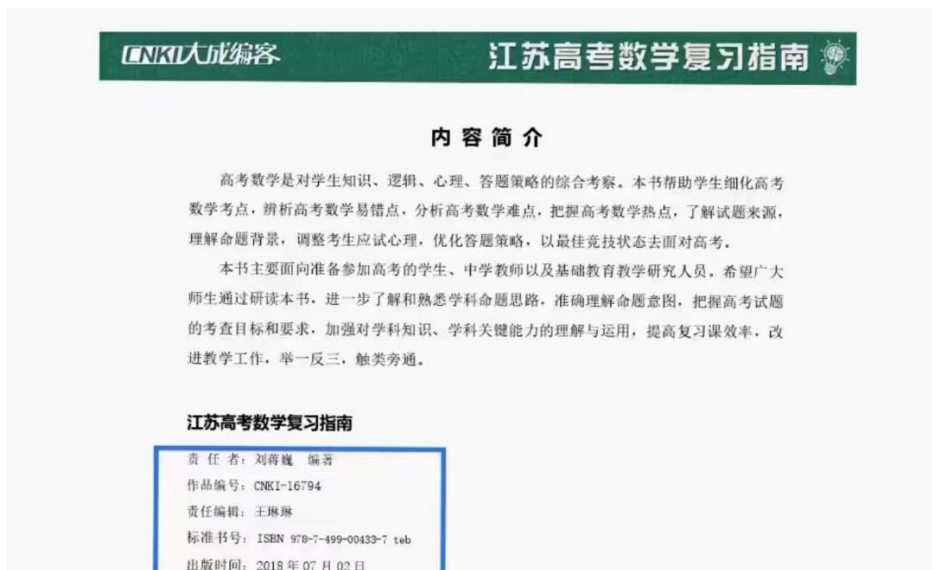
分析：本题主要考察利用导数的方法判断函数的单调性、左端点求右极限的知识。在此基础上结合严格上凸函数图像的特性，根据求使不等式成立的条件，进而求出 a 的取值范围。

（两个不等式）：
$$e^{\frac{m+n}{2}} < \frac{e^m - e^n}{m-n} < \frac{e^m + e^n}{2} \quad (m > n)$$

其对数形式：
$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{b+a}{2} \quad (b > a > 0),$$

又等价于：
$$\frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2}{a+b} \quad (b > a > 0)$$

引申：当 $k \in N^*$ 时，
$$\frac{1}{k+1} < \frac{2}{k+(k+1)} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} < \frac{1}{k},$$



教育部在 2022 年全国 2 卷第 22 题中，命制了以双曲函数为背景的试题：

已知函数 $f(x) = x \cdot e^{ax} - e^x$

(2) 当 $x > 0$ 时， $f(x) < -1$ ，求 a 的取值范围。

(3) 设 $n \in \mathbb{N}^*$ ，证明 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$

答案：(2) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

【命制思路解密】引理：当 $x > 0$ 时， $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > x$

证明方法 1：构造函数 $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x$ ，求导并研究单调性，即可完成证明。

证明方法 2： $[\sinh(x)]' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) > 0$ ，故 $\sinh(x)$ 单调递增

当 $x > 0$ 时， $[\sinh(x)]'' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - (\frac{1}{e})^x}{2} > 0$ ，故 $\sinh(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 下凸。

函数 $\sinh(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为： $y = x$ ；故，当 $x > 0$ 时， $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > x$

对于“引理”中的不等式——“当 $x > 0$ 时， $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > x$ ”，

令 $2x = t (t > 0)$ ，则 $e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} > t \quad (t > 0) (*)$

对(*)式两边，同时乘以 $e^{\frac{t}{2}}$ ，得： $e^t - 1 > te^{\frac{t}{2}} \quad (t > 0)$

即： $te^{\frac{t}{2}} - e^t < -1 \quad (t > 0)$

引入参数 a ，将 $\frac{1}{2}$ 替换成 a ，可得：

$a = \frac{1}{2}$ 是使得 $f(x) = x \cdot e^{ax} - e^x < -1$ 恒成立的一个取值。

据此命制第(2)问，让考生探究“当 $x > 0$ 时， $f(x) < -1$ ， a 的取值范围”。

(3) 命制思路：蕴含的“ $\ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ ”就是第(3)问

注：对 2022 年全国 2 卷第 22 题第(2)问相关压轴题感兴趣的，可以阅读《2026 届杭州高三一模与广东一调导数压轴题的命题关联》

第三层次：向读者学习，把自己的命题推广写成文章，发布出去，收来读者的赐教，抛砖引玉！

读者您好！我刘蒋巍才疏学浅，请您不吝赐教！